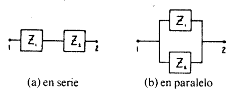

(a) en serie (b) en paralelo

Fig. 25–6. Dos impedancias conectadas en serie y en paralelo.

y es igual a $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)\,\hat{I}$. Esto significa que el voltaje en el circuito completo se puede escribir $\hat{V} = \hat{I}\hat{Z}_s$, donde la $\hat{Z}_s$ del sistema combinado en serie es la suma de los dos $\hat{Z}$ de cada parte:

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \tag{25.16}$$

Esta no es la única manera de conectar las cosas. También las podemos conectar de otra manera, llamada conexión en *paralelo* (Fig. 25-6b). Ahora vemos que un voltaje dado aplicado a los terminales, si los alambres de conexión son conductores perfectos, está aplicado efectivamente a ambas impedancias y va a dar origen a corrientes en cada una independientemente. Luego, la corriente en $\hat{Z}_1$ es igual a $\hat{I}_1 = \hat{V}/\hat{Z}_1$. La corriente en $\hat{Z}_2$ es $\hat{I}_2 = \hat{V}/\hat{Z}_2$. Es el *mismo voltaje*. La corriente total que se entrega a los terminales es la *suma* de las corrientes en las dos secciones: $\hat{I} = \hat{V}/\hat{Z}_1 + \hat{V}/\hat{Z}_2$. Esto se puede escribir

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{(1/\hat{Z}_1) + (1/\hat{Z}_2)} = \hat{I}\hat{Z}_p.$$

Así

$$1/\hat{Z}_p = 1/\hat{Z}_1 + 1/\hat{Z}_2. \tag{25.17}$$

Circuitos más complicados pueden simplificarse a veces tomando partes de ellos, trabajando con las impedancias sucesivas de las partes y combinando el circuito paso a paso, usando las reglas anteriores. Si tenemos cualquier tipo de circuito con muchas impedancias conectadas de todas las maneras posibles y si incluimos los voltajes en forma de pequeños generadores sin impedancia (cuando pasamos carga a través de él, el generador agrega un voltaje V), entonces se aplican los siguientes principios: (1) En cualquier nudo la suma de las corrientes hacia el nudo es cero. O sea, toda la corriente que entra debe salir. (2) Si llevamos una carga alrededor de cualquier malla, volviendo al punto de partida, el trabajo neto realizado es cero. Estas reglas se llaman *leyes de Kirchhoff* para circuitos eléctricos. Su aplicación sistemática a circuitos complicados a menudo simplifica su análisis. Los mencionamos aquí junto con las ecuaciones (25.16) y (25.17), en el caso que ustedes ya hayan encontrado tales circuitos que necesitan analizar en el trabajo de laboratorio. Van a ser discutidas de nuevo con mayor detalle el próximo año.

26

Optica: el principio del tiempo mínimo

26-1 La luz

Este es el primero de una serie de capítulos sobre el tema *radiación electromagnética*. La luz, con la cual vemos, es sólo una pequeña parte de un vasto espectro del mismo tipo de cosas, distinguiéndose las diversas partes de este espectro por valores diferentes de una cierta cantidad que varía. Esta cantidad variable podría llamarse la "longitud de onda". A medida que ésta varía en el espectro visible, la luz aparentemente cambia de color de rojo a violeta. Si exploramos el espectro sistemáticamente, desde longitudes de ondas largas hacia las más cortas, empezaríamos con lo que se llama comunmente *ondas de radio*. Las ondas de radio son asequibles técnicamente en un gran intervalo de longitudes de onda, algunas aún más largas que las usadas en las radiodifusiones regulares; las difusiones radiales regulares tienen longitudes de ondas correspondientes a unos 500 metros. A continuación están las así llamadas "ondas cortas", por ejemplo, ondas de radar, ondas milimétricas, etcétera. No existe ningún límite definido entre uno y otro intervalo de longitudes de ondas, porque la naturaleza no se nos presenta con límites bien definidos. El número asociado con un nombre dado para las ondas es aproximado solamente y también lo son por supuesto los nombres que damos a los diferentes intervalos.

A continuación, después de un largo camino por las ondas milimétricas, llegamos a lo que llamamos el *infrarrojo* y, por lo tanto, al espectro visible. A continuación, avanzando hacia el otro lado llegamos a la región que se llama *ultravioleta*. Donde termina el ultravioleta, empiezan los rayos X, pero no podemos definir precisamente dónde sucede esto; es aproximadamente a 10^{-8} m, o $10^{-2}\mu$. Estos son rayos X "blandos"; luego están los rayos X ordinarios y rayos X muy duros; luego los rayos γ, etc., para valores cada vez menores de esta dimensión llamada longitud de onda.

Dentro de esta vasta gama de longitudes de onda, hay tres o más regiones de aproximación que son especialmente interesantes. En una de éstas, existe una condición en la cual las longitudes de onda que intervienen son muy pequeñas comparadas con las dimensiones del equipo disponible para su estudio; además las energías de los fotones, usando la teoría cuántica, son pequeñas comparadas con la sensibilidad energética del equipo. En estas condiciones podemos hacer una primera aproximación por un método llamado *óptica geométrica*. Si, por otro lado, las longitudes de ondas son comparables a las dimensiones del equipo, lo que es difícil de obtener con la luz visible pero más fácil con ondas de radio, y si las energías de los fotones son todavía despreciablemente chicas, entonces se puede hacer una aproximación muy útil estudiando el comportamiento de las ondas, aun sin tomar en cuenta la mecánica cuántica. Este método se basa en la *teoría clásica de la radiación electromagnética*, que va a ser discutida en un capítulo más adelante. A continuación, si vamos a las longitudes de ondas más cortas, donde podemos despreciar el carácter ondulatorio, pero donde los fotones tienen una energía muy grande comparada con la sensibilidad del equipo, las cosas se hacen sencillas de nuevo. Esta es la imagen simple del fotón que vamos a describir sólo muy aproximadamente. La imagen completa, que unifica todo en un solo modelo no nos será asequible por mucho tiempo.

En este capítulo nuestra discusión se limita a la región de la óptica geométrica, en la cual nos olvidamos del carácter ondulatorio y fotónico de la luz, lo que va a ser explicado a su debido tiempo. Ni siquiera nos preocupamos de decir lo que *es* la luz, sino sólo de averiguar *cómo se comporta* en una escala grande comparada con las dimensiones de interés. Todo esto debe ser dicho para poner énfasis en que lo que vamos a decir es una mera aproximación; éste es uno de los capítulos que vamos a tener que "desaprender" de nuevo. Pero lo vamos a desaprender muy pronto, porque vamos a seguir casi inmediatamente con un método más preciso.

Aunque la óptica geométrica es sólo una aproximación, es de una gran importancia técnica y de gran interés histórico. Vamos a presentar este tema más históricamente que otros para dar una idea del desarrollo de una teoría física o de una idea física.

Primero, la luz es, por supuesto, familiar para todo el mundo y ha sido familiar desde tiempo inmemorial. Ahora bien, un problema es: ¿mediante qué proceso *vemos* la luz? Ha habido muchas teorías, pero finalmente se asentó una según la cual es que hay algo que entra al ojo –que rebota de los objetos y entra al ojo. Hemos escuchado esa idea por tanto tiempo que la aceptamos y es casi imposible para nosotros darnos cuenta que hombres muy inteligentes hayan propuesto teorías contrarias –que algo sale del ojo y palpa el objeto, por ejemplo–. Algunas otras observaciones importantes son que cuando la luz va de un lugar a otro, va en *líneas rectas*, si no hay nada en el camino, y que los rayos no parecen interferir unos con otros. Esto es, la luz se entrecruza en todas direcciones en la pieza, pero la luz que está pasando por nuestra línea de visión no afecta la luz que nos llega de algún objeto. Esto fue una vez un argumento poderosísimo en contra de la teoría corpuscular; fue usado por Huygens. Si la luz fuera como muchas flechas disparadas, ¿cómo podrían otras flechas pasar entre ellas tan fácilmente? Tales argumentos filosóficos no son de mucho peso. ¡Uno siempre podría decir que la luz está formada por flechas que pasan a través de ellas mismas!

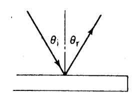

Fig. 26-1. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

26-2 Reflexión y refracción

La discusión anterior es suficiente sobre el *concepto* básico de la óptica geométrica –ahora debemos ir un poco más allá en los aspectos cuantitativos–. Hasta ahora tenemos a la luz yendo en línea recta entre dos puntos solamente; estudiemos ahora el comportamiento de la luz cuando golpea diversos materiales. El objeto más simple es un espejo y la ley para el espejo es que cuando la luz golpea el espejo, no sigue en línea recta, sino que rebota del espejo en una nueva línea recta que cambia cuando cambiamos la inclinación del espejo. La pregunta para los antiguos era: ¿cuál es la relación entre los dos ángulos que entran en juego? Esta es una relación muy simple, descubierta hace mucho tiempo. La luz que choca con un espejo viaja de tal manera que los dos ángulos entre cada rayo y el espejo, son iguales. Por alguna razón se acostumbra medir los ángulos desde la normal a la superficie del espejo. De manera que la llamada ley de reflexión es

$$\theta_i = \theta_r. \tag{26.1}$$

Esta es una proposición bastante simple, pero se encuentra un problema más difícil cuando la luz va desde un medio a otro, por ejemplo desde el aire al agua; aquí también vemos que no va en línea recta. En el agua el rayo tiene una inclinación con respecto a su trayectoria en el aire; si cambiamos el ángulo θ_i de manera que se acerque a la vertical, entonces el ángulo "en que se quiebra" no es tan grande. Pero si inclinamos el rayo de luz en un ángulo considerable, entonces la desviación es muy grande.

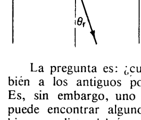

Fig. 26-2. Un rayo de luz se refracta cuando pasa de un medio a otro.

La pregunta es: ¿cuál es la relación entre uno y otro ángulo? Esto intrigó también a los antiguos por mucho tiempo ¡y aquí nunca encontraron la respuesta! Es, sin embargo, uno de los pocos lugares de toda la física griega donde uno puede encontrar algunos resultados experimentales registrados. Claudio Tolomeo hizo una lista del ángulo en el agua para cada uno de un número de ángulos diferentes en el aire. La tabla 26-1 muestra los ángulos en el aire en grados y el ángulo correspondiente medido en el agua. (Comúnmente se dice que los sabios griegos no hacían nunca experimentos. Pero sería imposible obtener

Tabla 26-1

Angulo en el aire	Angulo en el agua
10°	8°
20°	15-1/2°
30°	22-1/2°
40°	28°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45°
80°	50°

Tabla 26-2

Angulo en el aire	Angulo en el agua
10°	7-1/2°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40°
70°	48°
80°	49-1/2°

esta tabla de valores sin conocer la ley duradera, excepto mediante el experimento. Debe anotarse, sin embargo, que éstos no representan medidas cuidadosas independientes para cada ángulo, sino sólo algunos números interpolados de unas pocas medidas, porque todos ellos se ajustan perfectamente a una parábola.)

Este es entonces uno de los pasos más importantes en el desarrollo de una ley física: primero observamos un efecto, luego lo medimos y lo registramos en una tabla; luego tratamos de encontrar la *regla* mediante la cual una cosa está conectada con la otra. La tabla numérica anterior fue hecha en el año 140 D.C., ¡pero no fue sino en 1621 cuando alguien encontró finalmente la regla que conecta a los dos ángulos! La regla, encontrada por Willebrord Snell, un matemático holandés, es como sigue: si θ_i es el ángulo en el aire y θ_r el ángulo en el agua, entonces resulta que el seno de θ_i es igual a un cierto múltiplo constante del seno de θ_r:

$$\sin \theta_i = n \operatorname{sen} \theta_r. \tag{26.2}$$

Para el agua el número n es aproximadamente 1.33. La ecuación (26-2) se llama *ley de Snell;* nos permite *predecir* cómo se va a inclinar cuando va desde el aire al agua. La tabla 26-2 muestra los ángulos en el aire y en el agua de acuerdo con la ley de Snell. Nótese el notable acuerdo con la lista de Tolomeo.

26-3 El principio de Fermat del tiempo mínimo

Ahora bien, en un mayor desarrollo de la ciencia queremos más que una fórmula. Primero tenemos una observación, luego números que medimos, luego tenemos una ley que resume todos los números. Pero la verdadera *gloria* de la ciencia es que *podemos encontrar una manera de pensar* tal que la ley sea *evidente.*

La primera manera de pensar que hizo evidente la ley del comportamiento de la luz fue descubierto por Fermat cerca de 1650, y se llama *el principio del tiempo mínimo* o *principio de Fermat.* Su idea es ésta: que de todos los posibles caminos que puede tomar para ir de un punto a otro, la luz toma el camino que requiere el *tiempo más corto.*

Mostremos primero que esto es cierto para el caso del espejo, que este principio sencillo contiene tanto la ley de la propagación rectilínea como la ley del espejo. ¡De manera que nuestra comprensión está aumentando! Tratemos de encontrar la solución

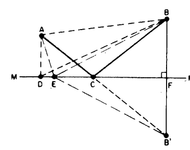

Fig. 26-3. Ilustración del principio del tiempo mínimo.

para el siguiente problema. En la figura 26-3 se muestran dos puntos A y B y un espejo plano MM'. ¿Cuál es la manera de ir de A a B en el tiempo más corto? ¡La respuesta es ir directamente de A a B! Pero si agregamos una regla extra que la luz tiene que *chocar con el espejo* y volver en el tiempo más corto, la respuesta no es tan sencilla. Una manera podría ser ir lo más rápidamente posible al espejo y después ir a B por el camino $A\ D\ B$. Por supuesto obtenemos entonces un camino largo $D\ B$. Si nos movemos un poco hacia la derecha, a E, aumentamos ligeramente la primera distancia, pero *disminuimos* mucho la segunda y así el largo del camino total, y por lo tanto el tiempo de viaje es menor. ¿Cómo se puede encontrar el punto C para el cual el tiempo es el más corto? Lo podemos encontrar de una manera muy bonita mediante un truco geométrico.

Construimos al otro lado de MM' un punto artificial B' que está a la misma distancia debajo del plano MM' que el punto B está sobre el plano. Entonces dibujamos la línea EB'. Ahora bien, como BFM es un ángulo recto y $BF = FB'$, EB es igual a EB'. Luego la suma de las dos distancias $AE + EB$, que es proporcional al tiempo que se va a demorar si la luz viaja con velocidad constante, también es la suma de las dos longitudes $AE + EB'$. Por lo tanto el problema se convierte en: ¿cuándo es mínima la suma de estas dos longitudes? La respuesta es fácil: ¡cuando la línea pasa por el punto C como una *línea recta* de A a B'! En otras palabras tenemos que encontrar el punto a partir del cual vamos hacia el punto artificial y ése será el correcto. Ahora, si ACB' es una línea recta, entonces el ángulo BCF es igual al ángulo $B'CF$ y por lo tanto al ángulo ACM. Por lo tanto, la afirmación de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión es equivalente a la afirmación de que la luz va al espejo de manera tal que vuelve al punto B' en el *menor tiempo posible.* Originalmente Herón de Alejandría afirmó que la luz viaja de tal manera que va al espejo y al otro punto en la menor *distancia* posible; así que no es una teoría moderna. Fue esto lo que inspiró a Fermat a sugerir que tal vez la refracción funcionaba con bases similares. Pero para la refracción la luz evidentemente no usa el camino de menor *distancia,* así Fermat ensayó la idea de que toma el *tiempo* más corto.

Antes que prosigamos analizando la refracción, debiéramos hacer una observación más acerca del espejo. Si tenemos una fuente de luz en el punto B y envía luz hacia el espejo, vemos que la luz que va a A desde el punto B llega a A exactamente de la misma manera como habría llegado a A si hubiera habido un objeto en B' y *ningún* espejo. Por supuesto, que el ojo detecta sólo la luz que entra físicamente; así que si tenemos un objeto en B y un espejo que hace que la luz llegue

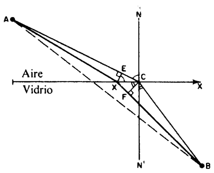

Fig. 26-4. Ilustración del principio de Fermat para la refracción.

al ojo exactamente de la misma manera como habría llegado al ojo si el objeto hubiera estado en B', entonces el sistema ojo-cerebro interpreta eso, suponiendo que no sabe mucho, como si hubiera un objeto en B'. De manera que la ilusión que hay un objeto detrás del espejo se debe simplemente a que la luz que está entrando al ojo está entrando de la misma manera, físicamente, como habría entrado si hubiera *habido* un objeto detrás (con excepción de la suciedad en el espejo y de nuestro conocimiento de la existencia del espejo, etc., lo que se corrige en el cerebro).

Demostremos ahora que el primcipio del tiempo mínimo va a dar la ley de Snell de la refracción. Debemos, sin embargo, hacer una suposición acerca de la velocidad de la luz en el agua. Vamos a suponer que la velocidad de la luz en el agua es menor que la velocidad de la luz en el aire en un cierto factor n.

En la figura 26-4 nuestro problema es de nuevo ir de A a B en el tiempo más corto. Para demostrar que lo mejor no es ir simplemente en línea recta, supongamos que una hermosa jovencita se ha caído de un bote y está gritando pidiendo ayuda en el agua en el punto B. La línea marcada X es la orilla. Nosotros estamos en un punto A en tierra y vemos el accidente y podemos correr y también nadar. Pero podemos correr más rápido de lo que podemos nadar. ¿Qué hacemos? ¿Vamos en línea recta? (¡Sí, sin duda!) Sin embargo, si usáramos un poco más de inteligencia nos daríamos cuenta que es ventajoso seguir una distancia un poco mayor por tierra para disminuir la distancia en el agua, porque nos movemos más lentamente en el agua. (¡Siguiendo esta línea de razonamiento, diríamos que lo correcto sería *calcular* muy cuidadosamente lo que debe hacerse!) En fin, tratemos de demostrar que la solución final del problema es el camino ACB, y que este camino toma el menor de los tiempos posibles. Si es el camino más corto, eso significa que si tomamos cualquier otro, va a ser más largo. De manera que si graficáramos el tiempo que demora en función de la posición del punto X, obtendríamos una curva algo parecida a la que se muestra en la figura 26-5 donde el punto C corresponde al

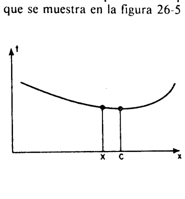

Fig. 26-5. El tiempo mínimo corresponde al punto C, pero puntos cercanos corresponden a casi el mismo tiempo.

menor de los tiempos posibles. Esto significa que si movemos el punto X hasta puntos *cercanos a C*, en primera aproximación no hay esencialmente *ningún cambio* en el tiempo, porque la inclinación es cero en el fondo de la curva. Así, pues, nuestra manera de encontrar la ley va a ser considerar que movemos el lugar en una pequeña cantidad y exigir que no haya esencialmente ningún cambio en el tiempo. (Por supuesto, que hay un cambio infinitesimal de *segundo* orden; deberíamos tener un aumento positivo para desplazamientos en cualquiera dirección desde C.) De manera que consideramos un punto vecino X y calculamos cuánto tomaría en ir de A a B por los dos caminos y comparamos el nuevo camino con el antiguo. Esto es muy fácil de hacer. Queremos que la diferencia sea, por supuesto, casi cero si la distancia XC es pequeña. Primero, fíjense en el camino en tierra. Si dibujamos una perpendicular XE vemos que este camino está acortado en una cantidad EC. Digamos que ganamos por no tener que ir esa distancia adicional. Por otro lado, en el agua, dibujando una perpendicular correspondiente CF, encontramos que tenemos que avanzar la distancia adicional XF, y eso es lo que perdemos. O sea que en *tiempo*, ganamos el tiempo que habría tomado avanzar la distancia EC, pero perdemos el tiempo que habría tomado avanzar la distancia XF. Estos tiempos deben ser iguales, ya que en primera aproximación no debe haber cambio en el tiempo. Pero suponiendo que en el agua la velocidad es $1/n$ veces la del aire, debemos tener

$$EC = n \cdot XF. \tag{26.3}$$

Por lo tanto, vemos que cuando tenemos el punto preciso, XC sen $EXC = nXC$ sen XCF o, simplificando el largo de la hipotenusa común XC y notando que

$$EXC = ECN = \theta_i \qquad \text{y} \qquad XCF = BCN' = \theta_r,$$

tenemos

$$\sin \theta_i = n \operatorname{sen} \theta_r. \tag{26.4}$$

De manera que para ir de un punto a otro en el tiempo mínimo cuando el cociente entre las velocidades es n, la luz debe entrar en un ángulo tal que el cociente entre los senos de los ángulos θ_i y θ_r sea el cociente entre las velocidades en los dos medios.

26-4 Aplicaciones del principio de Fermat

Consideremos ahora alguna de las consecuencias interesantes del principio del tiempo mínimo. Primero está el principio de reciprocidad. Si al ir de A a B hemos encontrado el camino de tiempo mínimo, al ir en la dirección opuesta (suponiendo que la luz va con la misma velocidad en cualquier dirección) el tiempo más corto corresponderá al mismo camino y, por lo tanto, si la luz puede ser enviada en un sentido, puede ser enviada en el otro.

Un ejemplo interesante es un bloque de vidrio con caras paralelas planas formando un ángulo con el haz de luz. La luz al ir a través del bloque desde el punto A al punto B (Fig. 26-6), no va en línea recta, sino que disminuye el tiempo en el blo-

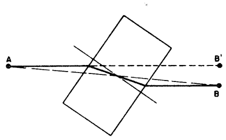

Fig. 26-6. Un rayo de luz se desvía cuando pasa por un bloque transparente.

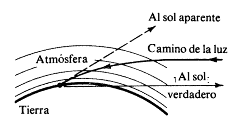

Fig. 26-7. Cerca del horizonte el sol aparente está más alto que el sol verdadero en cerca de 1/2 grado.

que haciendo el ángulo en el mismo menos inclinado, aunque pierde un poco en el aire. El rayo se desplaza sencillamente paralelo a sí mismo porque los ángulos de entrada y de salida son los mismos.

Un tercer fenómeno interesante es que cuando vemos ponerse el sol, ¡ya está bajo el horizonte! No parece como si estuviera debajo del horizonte, pero está (Fig. 26-7). La atmósfera de la tierra es enrarecida arriba y densa abajo. La luz viaja más lentamente en el aire que en el vacío, y así la luz del sol puede llegar al punto S más allá del horizonte más rápidamente si en vez de ir simplemente en línea recta, evita las regiones densas donde va más lentamente, atravesándolas con una mayor inclinación. Cuando parece ponerse tras el horizonte, realmente está hace rato bajo el horizonte. Otro ejemplo de este fenómeno es el espejismo que uno ve a menudo cuando maneja en caminos calurosos. Uno ve "agua" en el camino, pero cuando llega ahí ¡está tan seco como el desierto! Lo que estamos viendo realmente es la luz del cielo "reflejada" en el camino: la luz del cielo, con rumbo al camino, puede terminar en el ojo como se muestra en la figura 26-8. ¿Por qué? El aire está muy caliente justo sobre el camino, pero está más frío más arriba. El aire caliente está más expandido que el aire frío y es más enrarecido y es menor la disminución de la velocidad de la luz. O sea, la luz va más rápido en la región caliente que en la región fría. Por lo tanto, la luz en vez de decidir irse de una manera directa, tiene también un camino de tiempo mínimo, por el cual entra por un rato en la región donde se mueve más rápido a fin de ahorrar tiempo. Así, pues, puede seguir una curva.

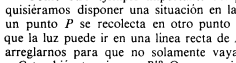

Fig. 26-8. Un espejismo.

Como otro ejemplo importante del principio de tiempo mínimo, supongan que quisiéramos disponer una situación en la cual tenemos que toda la luz que sale de un punto P se recolecta en otro punto P' (Fig. 26-9). Eso significa, por supuesto, que la luz puede ir en una línea recta de P a P'. Eso está bien; pero, ¿cómo podemos arreglarnos para que no solamente vaya derecho, sino que la luz que parte de P a Q también termine en P'? Queremos juntar toda la luz en lo que llamamos *foco*. ¿Cómo? Si la luz toma siempre el camino de tiempo mínimo,

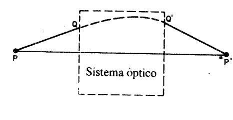

Fig. 26-9. Una "caja negra" óptica.

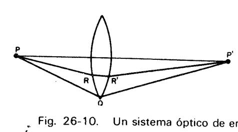

Fig. 26-10. Un sistema óptico de enfoque.

entonces ciertamente no debería querer seguir todos esos caminos. ¡La única manera para que la luz pueda estar perfectamente satisfecha de tomar varios caminos adyacentes es hacer aquellos tiempos *exactamente iguales!* De otra manera, seleccionaría el de tiempo mínimo. Por lo tanto, el problema de hacer un sistema de enfoque es sencillamente arreglar un dispositivo tal ¡que le toma a la luz el mismo tiempo para ir por *todos* los caminos diferentes!

Esto es fácil de hacer. Supongan que tuviéramos un pedazo de vidrio en el cual la luz va más despacio que en el aire (Fig. 26-10). Ahora consideren un rayo que va por el aire por el camino PQP'. Ese es un paso más largo que desde P directamente a P' y sin duda demora un tiempo mayor. Pero si introdujéramos un pedazo de vidrio del grosor justo (después averiguaremos qué grosor) ¡podría compensar exactamente el exceso de tiempo que demoraría la luz yendo oblicua! En este caso podemos hacer que el tiempo que la luz demora en atravesar derecho sea el mismo que el tiempo que demora en ir por el camino PQP'. Igualmente, si tomamos un rayo $PRR'P'$ que está algo inclinado, no es tan largo como PQP' y no tenemos que compensar tanto como para el recto, pero tenemos que compensar algo. Terminamos con un pedazo de vidrio como el de la figura 26-10. Con esta forma toda la luz que viene de P va a P'. Esto, por supuesto, es bien conocido por nosotros y llamamos a tal dispositivo *lente* convergente. En el capitulo siguiente vamos a calcular realmente qué forma debe tener la lente para hacer un enfoque perfecto.

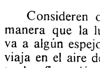

Fig. 26-11. Un espejo elipsoidal.

Consideren otro ejemplo: supongan que deseamos disponer algunos espejos de manera que la luz de P vaya siempre a P' (Fig. 26-11). Por cualquier camino ella va a algún espejo y vuelve y todos los tiempos deben ser iguales. Aquí siempre la luz viaja en el aire de manera que el tiempo y la distancia son proporcionales. Por lo tanto, la afirmación que todos los tiempos son iguales es igual a la afirmación que la distancia total es la misma. Por lo tanto, la suma de las dos distancias r_1 y r_2 debe ser una constante. Una *elipse* es la curva que tiene la propiedad de que la suma de las distancias desde dos puntos es constante para todo punto sobre la elipse; así podemos estar seguros que la luz de un foco va a ir al otro.

El mismo principio funciona para concentrar la luz de una estrella. El gran telescopio de Palomar de cinco metros está construido según el siguiente principio. Imaginen un estrella alejada miles de millones de

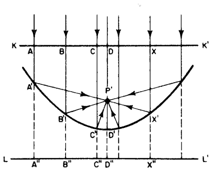

Fig. 26-12. Un espejo paraboloidal.

kilómetros; desearíamos lograr que toda la luz que entra llegue a un foco. Por cierto que no podemos dibujar los rayos que llegan hasta la estrella, pero de todos modos deseamos verificar si los tiempos son iguales. Por supuesto, sabemos que cuando los diversos rayos han llegado a un plano KK', perpendicular a los rayos, todos los tiempos en este plano son iguales (Fig. 26-12). Los rayos deben entonces bajar hasta el espejo y proseguir a P' en tiempos iguales. Esto es, debemos encontrar una curva que tenga la propiedad de que la suma de las distancias $XX' + X'P'$ sea una constante, cualquiera sea la elección X. Una manera fácil de encontrarla es prolongar la línea XX' hasta un plano LL'. Ahora bien, si disponemos nuestra curva de manera que $A'A'' = A'P'$, $B'B'' = B'P'$, $C'C'' = C'P'$, etc., tendremos nuestra curva, porque entonces, por supuesto, $AA' + A'P' = AA' + A'A''$ va a ser constante. Así, pues, nuestra curva es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de una línea y un punto. Esa curva se llama parábola; el espejo se hace en forma de parábola.

Los ejemplos anteriores ilustran el principio con el cual pueden ser diseñados esos dispositivos ópticos. Las curvas exactas pueden ser calculadas usando el principio según el cual, para enfocar perfectamente, los tiempos de viaje deben ser exactamente iguales para todos los rayos de luz, al mismo tiempo que son menores que para cualquier otro camino vecino.

Vamos a discutir más estos dispositivos ópticos de enfoque en el capitulo siguiente; discutamos ahora el desarrollo subsiguiente de la teoría. Cuando se desarrolla un nuevo principio teórico, como el principio del tiempo mínimo, nuestra primera inclinación sería querer decir: "Bueno, eso es muy bonito; es delicioso, pero la pregunta es ¿ayuda en algo a comprender la física?" Alguien podría decir: "Sí, ¡vean cuántas cosas podemos comprender ahora!" Otro dice: "Muy bien, pero yo puedo comprender los espejos también. Necesito una curva tal que todo plano tangente forme ángulos iguales con los dos rayos. Puedo idear una lente también, porque cada rayo que llega a él se dobla en ángulo por la ley de Snell." Evidentemente la afirmación de que el tiempo es mínimo y la afirmación de que los ángulos son iguales en la reflexión y que los senos de los ángulos son proporcionales en la refracción son lo mismo. De manera que, ¿es sólo una pregunta filosófica o estética? Puede haber argumentos para ambos bandos.

Sin embargo, la importancia de un principio poderoso es que *predice nuevas cosas.*

Es fácil demostrar que hay una cantidad de cosas nuevas predichas por el principio de Fermat. Primero, supongamos que hay *tres* medios, vidrio, agua y aire; realizamos un experimento de refracción y medimos el índice n de un medio respecto al otro. Llamemos n_{12} el índice del aire (1) respecto al agua (2), n_{13} el índice del aire (1) respecto al vidrio (3). Si midiéramos agua respecto a vidrio, deberíamos encontrar otro índice que llamaremos n_{23}. Pero no hay ninguna razón *a priori* por que habría de haber alguna conexión entre n_{12}, n_{13} y n_{23}. Por otro lado, de acuerdo con la idea del tiempo mínimo, *existe* una relación bien definida. El índice n_{12} es el cociente entre dos cosas, la velocidad en el aire y la velocidad en el agua; n_{13} es el cociente entre la velocidad en el aire y la velocidad en el vidrio; n_{23} es el cociente entre la velocidad en el agua y la velocidad en el vidrio. Luego simplificamos el aire y obtenemos

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \tag{26.5}$$

En otras palabras, *predecimos* que el índice para un nuevo par de materiales se puede obtener de los índices de los materiales individuales, ambos respecto al aire o respecto al vacío. Así si medimos la rapidez de la luz en todos los materiales y de ahí obtenemos un solo número para cada material, a saber su índice relativo al vacío, llamado n_i (n_1 es la velocidad en el aire relativa a la velocidad en el vacío, etcétera), entonces nuestra fórmula es fácil. El índice para dos materiales cualesquiera i y j es

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \tag{26.6}$$

Usando sólo la ley de Snell, no hay base para una predicción de este tipo.* Pero, por supuesto, esta predicción funciona. La realción (26.5) se conoció desde muy temprano y fue un poderoso argumento a favor del principio del tiempo mínimo.

Otro argumento para el principio del tiempo mínimo, otra predicción, es que si *medimos* la velocidad de la luz en el agua, va a ser menor que en el aire. Esta es una predicción de un tipo totalmente diferente. Es una predicción brillante, porque todo lo que hemos medido hasta ahora son *ángulos;* aquí tenemos una predicción teórica, que es bastante diferente de las observaciones de las cuales Fermat dedujo la idea del tiempo mínimo. ¡Resulta, de hecho, que la velocidad en el agua *es* menor que la velocidad en el aire en la proporción justa que se necesita para tener el índice correcto!

26-5 Un enunciado más preciso del principio de Fermat

Realmente debemos hacer el enunciado del principio del tiempo mínimo un poco más preciso. No fue expuesto correctamente más arriba. Se le llama *incorrectamente* principio del tiempo mínimo y hemos seguido con la descripción incorrecta por conveniencia, pero ahora debemos ver cuál es el enunciado correcto. Supongan que tuviéramos un espejo como en la figura 26-3. ¿Qué le hace pensar a la luz que tiene que ir al espejo? El camino del tiempo mínimo es claramente AB. Así, algunas personas podrían decir: "A veces es un tiempo

* Aunque se puede deducir si se hace la hipótesis adicional de que al agregar una capa de una sustancia a la superficie de otra, no cambia el posible ángulo de refracción en el último material.

máximo". ¡*No* es un tiempo máximo, porque ciertamente un camino curvado tomaría un tiempo aún más largo! El enunciado correcto es el siguiente: un rayo que va en cierto camino particular tiene la propiedad de que si hacemos un pequeño cambio (digamos un corrimiento del 1 por 100) en el rayo de cualquier manera que sea, digamos en el lugar en el cual llega al espejo o en la forma de la curva o cualquier cosa, *no* va a haber cambios de primer orden en el tiempo; va a haber sólo un cambio de *segundo* orden en el tiempo. En otras palabras, el principio es que la luz toma un camino tal que hay muchos otros caminos vecinos que demoran casi exactamente el *mismo* tiempo.

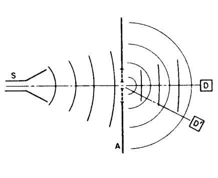

Fig. 26-13. El pasaje de una onda de radio a través de una rendija estrecha.

La siguiente es otra dificultad con el principio del tiempo mínimo; es una que las personas que no gustan de este tipo de teorías nunca pudieron aceptar. Con la teoría de Snell podemos "entender" la luz. La luz va caminando, ve una superficie, se curva porque hace algo en la superficie. La idea de causalidad, de que va de un punto a otro y a otro, etc., es fácil de entender. Pero el principio del tiempo mínimo es un principio filosófico completamente diferente acerca de cómo funciona la naturaleza. En vez de decir que es algo causal, que cuando hacemos algo, otra cosa sucede, etc., dice esto: nosotros establecemos la situación y la *luz* decide cuál es el tiempo más corto, o el extremo, y elige ese camino. Pero, ¿*qué* hace, *cómo* lo averigua? ¿*Huele* ella los caminos vecinos y los compara entre sí? La respuesta es sí, lo hace, en cierto modo. Ese es el aspecto que no se conoce, por supuesto, en la óptica geométrica y que está encerrado en el concepto de *longitud de onda;* la longitud de onda nos dice aproximadamente cuán lejos la luz debe "oler" el camino para controlarlo. Es difícil demostrar este hecho en una escala grande con la luz, porque las longitudes de onda son tan terriblemente cortas. Pero con las ondas de radio, digamos ondas de 3 cm, las distancias que están controlando las ondas de radio son más grandes. Si tenemos una fuente de ondas de radio, un detector y una rendija, como en la figura 26-13, los rayos van, por supuesto, de S a D porque es una línea recta; y si cerramos un poco la rendija, está bien –todavía pasan–. Pero si ahora movemos el detector a un lado hacia D', las ondas no van a ir a través de la rendija ancha de S a D' porque verifican varios caminos vecinos y dicen: "No, mi amigo, todos ellos corresponden a tiempos diferentes." Por otro lado, si *impedimos* a la radiación que verifique los caminos cerrando la rendija hasta una fisura muy fina, entonces no hay más que un camino disponible ¡y la radiación lo toma! ¡Con una rendija angosta llega a D' más radiación que la que llega con una rendija ancha!

Uno puede hacer lo mismo con la luz, pero es difícil demostrarlo a una escala grande. El efecto se puede ver en las siguientes condiciones simples. Encuentren una luz pequeña y brillante, digamos una lámpara no esmerilada en un farol callejero lejano, o la reflexión del sol en el parachoques curvado de un automóvil. Entonces pongan dos dedos frente a un ojo de manera de mirar por la hendidura y estrujen la luz hasta cero muy suavemente. Van a ver que la imagen de la luz, que era un pequeño punto antes, se hace bastante alargada y aun se estira en una larga línea. La razón es que los dedos están muy juntos, y la luz que se supone que viene en línea recta se abre en un ángulo de manera que cuando llega al ojo entra desde varias direcciones. Además notarían, si son muy cuidadosos, máximos laterales, muchas franjas a lo largo de los bordes también. Más aún, todo está coloreado. Todo esto va a ser explicado a su debido tiempo, pero por el momento es una demostración de que la luz no siempre va en líneas rectas, y es una que se realiza muy fácilmente.

26-6 Cómo funciona

Finalmente, damos una visión muy somera de lo que verdaderamente sucede, de cómo el todo funciona realmente a partir de lo que ahora creemos correcto, el punto de vista preciso de la dinámica cuántica, pero por cierto descrito sólo cualitativamente. Al seguir la luz de A a B en la figura 26-3, encontramos que la luz no parece estar en forma de ondas. Por el contrario, los rayos parecen estar hechos de fotones y realmente producirían clics en un contador de fotones, si es que estuviéramos usando uno. El brillo de la luz es proporcional al número promedio de fotones que llega por segundo, y lo que calculamos es la *probabilidad* de que un fotón llegue de A a B, digamos, al golpear el espejo. La *ley* de esa *probabilidad* es muy extraña. Tomen cualquier camino y encuentren el tiempo para ese camino, luego formen un número complejo o dibujen un pequeño vector complejo $\rho e^{i\theta}$ *cuyo ángulo* θ *sea proporcional al tiempo.* El número de vueltas por segundo es la frecuencia de la luz. Ahora tomen otro camino; tiene, por ejemplo, un tiempo diferente, de manera que su vector está girado en un ángulo diferente –siendo el ángulo siempre proporcional al tiempo–. Tomen *todos* los caminos disponibles y agreguen un pequeño vector por cada uno; ¡entonces la respuesta es que la probabilidad de llegada del fotón es proporcional al cuadrado del largo del vector final, desde el principio hasta el final!

Mostremos ahora cómo esto implica el principio del tiempo mínimo para un espejo. Consideramos todos los rayos, todos los caminos posibles ADB, AEB, ACB, etcétera, en la figura 26-3. El camino ADB hace una cierta contribución pequeña, pero el camino siguiente AEB demora un tiempo bastante diferente, de manera que su ángulo θ es bastante diferente. Digamos que el punto C corresponde al tiempo mínimo, donde si cambiamos los caminos los tiempos no cambian. Así que por un rato los tiempos cambian y entonces empiezan a variar cada vez menos a medida que nos acercamos al punto C (Fig. 26.14.) De manera que las flechas que tenemos que sumar vienen con casi exactamente

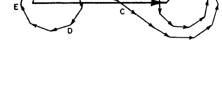

Fig. 26-14. La suma de amplitudes de probabilidad para muchos caminos vecinos.

el mismo ángulo por un rato cerca de C y entonces gradualmente el tiempo empieza a aumentar de nuevo y las fases giran hacia el otro lado, etc. A la larga, tenemos un nudo bastante apretado. La probabilidad total es la distancia de un extremo al otro al cuadrado. *Casi toda aquella probabilidad acumulada se presenta en la región donde todas las flechas están en la misma dirección* (o en la misma fase). Todas las contribuciones de los caminos que tienen tiempos muy diferentes cuando cambiamos de camino, se anulan al apuntar en direcciones opuestas. Esto es porque, si escondemos las partes externas del espejo, todavía refleja casi exactamente lo mismo, porque todo lo que hicimos fue sacar un pedazo del diagrama dentro de los extremos de la espiral, y esto sólo produce un cambio muy pequeño en la luz. De manera que ésta es la relación entre la imagen última de los fotones con una probabilidad de llegada que depende de una acumulación de flechas y el principio del tiempo mínimo.

27

Optica geométrica

27-1 Introducción

En este capítulo vamos a discutir algunas aplicaciones elementales de las ideas del capítulo anterior a algunos dispositivos prácticos, usando la aproximación llamada *óptica geométrica*. Es una aproximación muy útil en el diseño práctico de muchos sistemas e instrumentos ópticos. La óptica geométrica es o bien muy simple o bien muy complicada. Esto significa que o la podemos estudiar sólo superficialmente de manera que podamos diseñar instrumentos burdamente usando reglas que son tan simples que es escasamente necesario tratarlas aquí, ya que son prácticamente de nivel de enseñanza secundaria; o bien, si queremos saber de los pequeños errores en las lentes y detalles similares, el tema se hace tan complicado ¡que es muy avanzado para discutirlo aquí! Si uno tiene un problema real y detallado en el diseño de lentes, incluyendo el análisis de aberraciones, entonces se le aconseja leer sobre el tema, o bien simplemente trazar rayos a través de las diversas superficies (que es lo que el libro enseña cómo hacer), usando la ley de refracción de un lado a otro, y encontrar cómo salen y ver si forman una imagen satisfactoria. La gente ha dicho que esto es demasiado tedioso, pero hoy día la manera correcta de hacerlo es con computadores. Uno puede plantear el problema y hacer el cálculo para un rayo después otro muy fácilmente. De manera que el tema es, en último término, realmente muy simple y no encierra nuevos principios. Además, resulta que las reglas, ya sea de la óptica elemental o de la avanzada, son rara vez características de otros campos, de manera que no hay ninguna razón especial para seguir más con el tema, con una excepción importante.

La teoría más avanzada y abstracta de la óptica geométrica fue desarrollada por Hamilton y resulta que ésta tiene aplicaciones muy importantes en mecánica. Es realmente aún más importante en mecánica que en óptica; así que dejamos la teoría de Hamilton para el tema de mecánica analítica avanzada que se estudia en cuarto año o en la escuela de graduados. Así, estimando que la óptica geométrica contribuye muy poco, excepto por sí misma, vamos ahora